

$$\int z^3 dz$$

مثال: اوجد التكامل

حل: القطعة المستقيمة التي تتخذ من $z=0$ إلى $z=1+2i$

(1) C هي قطعتان مستقيمتان C_1 تتخذ من $z=0$ إلى $z=1$

C_2 القطعة الثانية تتخذ من $z=1$ إلى $z=1+2i$

(2) C تتكون من ثلاث قطع: قطعة الأولى تتخذ من $z=0$ إلى $z=1$

الثانية تتخذ من $z=1$ إلى $z=1+2i$ والثالثة تتخذ من $z=1+2i$ إلى $z=0$

الحل: انما نأخذ الأولى

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) z'(t) dt$$

ان صيغة القطعة المستقيمة التي تتخذ من $z=0$ إلى $z=1+2i$ هي

$$\star z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = 0 + t(1+2i) = t + 2it \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\star z'(t) = 1 + 2i$$

$$\star f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$f(z(t)) = t^3 - 3t(4t^2) + i(3t^2(2t) - 8t^3) \\ = -11t^3 + i(-2t^3)$$

حيث التكامل يكون:

$$\int z^3 dz = \int_0^1 (-11t^3 - 2it^3)(1+2i) dt$$

$$= -(1+2i) \int_0^1 (11t^3 + 2it^3) dt$$

بعضة كل العلاقة:

$$\int f(t) dt = \int_0^1 u(t) dt + i \int_0^1 v(t) dt$$

$$\Rightarrow = -(1+2i) \left[\int_0^1 11t^3 dt + 2i \int_0^1 t^3 dt \right]$$

$$= -(1+2i) \left[\frac{11}{4} + i \left[\frac{1}{4} \right] \right]$$

$$= -(1+2i) \left[\frac{11}{4} + i \frac{1}{4} \right] = - \left[\left(\frac{11}{4} - 1 \right) + i \left(\frac{1}{4} + \frac{11}{4} \right) \right] = -\frac{7}{4} - 16i$$



20 / /

التاريخ

الموضوع

٢-١١. أن C يتكون من نقطتين مستقيمتين عند

$$\int_C z^3 dz = \int_{C_1} z^3 dz + \int_{C_2} z^3 dz$$

كما أن قيمة التكامل الأول أن ما دالة القطعة المستقيمة التي نضد من z_{10} و z_{11}

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = 0 + t(1 - 0) = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z'(t) = 1$$

$$f(z(t)) = t^3 - 0 + i(0) = t^3$$

$$\int_C z^3 dz = \int_0^1 t^3 \cdot 1 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

~~$$\int_C z^3 dz = \int_0^1 [(1-12t^2) + i(6t-8t^3)] 2i dt = 2i \int_0^1 [(1-12t^2) + i(6t-8t^3)] dt$$~~

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = 1 + t(1 + 2i - 1) = 1 + 2it \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$f(z(t)) = 1 - 12t^2 + i(6t - 8t^3) \quad z'(t) = 2i$$

$$\int_C z^3 dz = \int_0^1 [(1 - 12t^2) + i(6t - 8t^3)] 2i dt$$

$$= 2i \left[\int_0^1 (1 - 12t^2) dt + i \int_0^1 (6t - 8t^3) dt \right]$$

$$= 2i \left[t - 4t^3 \Big|_0^1 + i(3t^2 - 2t^4) \Big|_0^1 \right]$$

$$= 2i [1 - 4 + i(3 - 2)] = 2i(-3 + i) = -2 - 6i$$

$$\int_C z^3 dz = \int_{C_1} z^3 dz + \int_{C_2} z^3 dz = \frac{1}{4} + (-2 - 6i) = \frac{1}{4} - 2 - 6i$$

$$\int_C z^3 dz = \int_{C_1} z^3 dz + \int_{C_2} z^3 dz + \int_{C_3} z^3 dz$$

$$= \frac{1}{4} - 6i - (-\frac{7}{4} - 6i) = 0$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} = t \Rightarrow z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

التاريخ 201 / /

الموضوع

مثال 2 أوجد قيمة التكامل $\int_C (y - x - 3x^2 i) dz$

حسب (1) في القطعة المستقيمة التي يمتد من z_1 إلى z_2

(2) في مضلع مستقيم الأولي يمتد من z_1 إلى z_2 إلى z_3

والثانية يمتد من z_3 إلى z_2

(3) من ثلاث ضلع الأولي يمتد من z_1 إلى z_2

والثانية يمتد من z_2 إلى z_3 والثالثة يمتد من z_3 إلى z_1

الحل 1 - معادلة القطعة المستقيمة في الحالة الأولى هي $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ $0 \leq t \leq 1$

$$z(t) = 0 + t(2 + i) = t(2 + i)$$

$$= 2t + it \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z'(t) = 2 + i$$

$$f(z(t)) = (t - 2t) - 3(2t)^2 i = -t - 12t^2 i$$

$$\int_C (y - x - 3x^2 i) dz = \int_0^1 (-t - 12t^2 i) (2 + i) dt$$

$$= -(2 + i) \left[\int_0^1 t dt + i \int_0^1 t^2 dt \right] = (-2 - i) \left[\frac{t^2}{2} + i \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= (-2 - i) \left(\frac{1}{2} + i \right) = (-1 + 4) + i(-8 - \frac{1}{2}) = 3 - \frac{17i}{2}$$

$$\int_C (y - x - 3x^2 i) dz = \int_{C_1} (y - x - 3x^2 i) dz + \int_{C_2} (y - x - 3x^2 i) dz$$

لنحسب قيمة التكامل على القطعة التي يمتد من $z = 0$ إلى $z = i$

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = 0 + t(i - 0) = it \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z'(t) = i$$

$$f(z(t)) = (t - 0 - 3 \cdot 0) = t$$

$$\int_{C_1} (y - x - 3x^2 i) dz = \int_0^1 t i dz = i \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{i}{2}$$

لساب نقطة الزكاط على C_2 ان مصادرة C_1 في

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = 1 + t(2+i) - i = 1 + 2t = 2t + 1$$

$$z'(t) = 2$$

$$f(z(t)) = (1-2t) - 3(4t^2)i = 1-2t-12t^2i$$

$$\begin{aligned} \int_C (y-x-3x^2i) dz &= \int_0^1 [1-2t-12t^2i] 2 dt \\ &= 2 \left[\int_0^1 (1-2t) dt + i \int_0^1 -12t^2 dt \right] \\ &= [t-t^2 - 4t^3]_0^1 = -8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C (y-x-3x^2i) dz &= \int_{C_1} (y-x-3x^2i) dz + \int_{C_2} (y-x-3x^2i) dz + \int_{C_3} -dz \quad (B) \\ &= -\frac{15}{2}i - (-3 - \frac{17}{2}i) = -3 + i \end{aligned}$$

طريقة (2) اطلبه الثاني

القطعة المستقيمة في جزر من المنظم اما من المنظم (0,1) والنقطة $(2,1)$

ان مصادرة المنظم التي تفر من المنظم في

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} (x-x_1)$$

$$y-1 = \frac{1-1}{2-0} (x-0) \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$= x(t) + i$$

$$z(t) = t + i \quad 0 \leq t \leq 2 \quad x(t) = t$$

ملاحظة:

من خلال المثالين السابقين نلاحظ مايلي

في المثال الاول مصادرة الدالة المستقيمة في z و z

وهي الزكاط لهذه الدالة لا خطية انه لم يتغير وهذا يترافق مع

اما في المثال الثاني الدالة $f(z)$ هي دالة مستقيمة لا خطية مساوي

نظائر غرين: العلاقة بين الدائري المجهني و الدائري السطحي

الموضوع

التاريخ / / 201

يبين المثال الثاني سمات الدالة المستقلة هي $f(z) = (y-x-3x^2)$ وحدها $f(z)$ هي التفاضل بتغير المتغير الذي يصل بين المتغيرين x و y ان قيمة ذلك هذه الدالة مع كميات صغيرة لم تكن معدومة والسبب في ذلك هو ان الدالة المستقلة في المثال الثاني هي دالة مركبة

ملاحظة خفيفة

اذا سمات الدالة $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية مع وحين انساب المعادلة البسيطة عندئذ

$$\int f(z) dz = 0$$

الاشياء لدينا

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))] (x'(t) + i y'(t)) dt$$

$$= \int_a^b (u x' - v y' + i (u y' + v x')) dt$$

$$= \int_C f(z) dz = \int_a^b (u x' dt - v y' dt + i (u y' dt + v x' dt))$$

$$= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

ملاحظة خفيفة

اذا كان $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دالتان مستمرتان ومشتقان جزئية مشتركة في المنطقة D من المستوى $x-y$ وكان يحيط هذه المنطقة المنحني γ

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

بالاستفادة من علاقة غرين السابقة فيكون

$$\int_{\gamma} u dx - v dy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_C u dx - v dy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

حالة f تحليلية هي الشبان f قابلة للاستقامة أي أن f دالة نقية
شروط كوشي-ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy = 0 \quad \wedge \quad \int_C u dx + v dy = 0$$

صفر

$$\int_C f(z) dz = 0$$

ناتج التكامل هو ثابت إلى كثرة تعريف كوشي للكفاف المتكاملة البسيطة يمكن

$$\int_C e^z dz = 0$$

$$14=2$$

$$\int_C \sin z dz = 0$$

$$12-11=2$$